Eléments d'algèbre linéaire

Généralités d'algèbre linéaire

Exercice 1 [00159] [correction]
Soit $f \in L(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires.
Montrer que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 2 [00160] [correction]
Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Comparer :
a) $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.
b) $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 3 [00161] [correction]
A quelle condition la réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle est un sous-espace vectoriel ?

Exercice 4 [00163] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Δ l'endomorphisme de E déterminé par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
a) Justifier que l'endomorphisme Δ est nilpotent.
b) Déterminer des réels $a_0, \dots, a_n, a_{n+1}$ non triviaux vérifiant :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k) = 0$.

Exercice 5 Mines-Ponts MP [02662] [correction]
Soit $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$.
a) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une $\mathbb{Q}$-base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel K.
b) Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 [03133] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\varphi(1) = 1, \varphi(X) = X \text{ et } \forall P \in \mathbb{R}[X], P(a) = P(b) = 0 \Rightarrow \varphi(P) = 0$$

Exercice 7 [03156] [correction]
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \dim\left(\ker u^{k+\ell}\right) \leqslant \dim\left(\ker u^k\right) + \dim\left(\ker u^\ell\right)$$

Exercice 8 [03247] [correction]
Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.
a) Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\ker u$.
b) Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\mathrm{Im} u$.
c) A quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$?

Exercice 9 Mines-Ponts MP [03286] [correction]
Caractériser les sous-espaces F d'un espace vectoriel E tels que

$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$$

Projecteurs

Exercice 10 [00165] [correction]
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
a) Montrer que p et q ont même noyau si, et seulement si, $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
b) Enoncer une condition nécessaire et suffisante semblable pour que p et q aient même image.

Exercice 11 Centrale MP [00164] [correction]
Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
a) Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.
b) Préciser alors $\mathrm{Im}(p + q)$ et $\ker(p + q)$

Exercice 12 [02468] [correction]
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $p \circ q = 0$.
a) Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
b) Déterminer image et noyau de celui-ci.

Exercice 13 [00166] [correction]
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.
a) Montrer que $u(\ker p) \subset \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p \subset \ker u$.
b) En déduire $u^2 = 0$.
c) Réciproque ?

Exercice 14 X MP [02939] [correction]
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. Les endomorphismes p et q sont-ils diagonalisables ? codiagonalisables ?

Exercice 15 Mines-Ponts PC [02242] [correction]
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ avec $n > p$, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifiant $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.
a) Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.
b) Déterminer son rang, son image et son noyau.

Exercice 16 [03251] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer

$$f \text{ est un projecteur } \Leftrightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(\mathrm{Id} - f) = n$$

Base d'un espace vectoriel

Exercice 17 [00167] [correction]
Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = |x - a|$.
Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Exercice 18 [00168] [correction]
Pour $a \in \mathbb{C}$, on note e_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $e_a(t) = \exp(at)$.
Montrer que la famille $(e_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Exercice 19 [00169] [correction]
Pour $a \in \mathbb{R}^+$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f_a(t) = \cos(at)$$

Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}^+}$ est une famille libre d'éléments de l'espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 20 [00170] [correction]
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.
Montrer que la famille $(\ln p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 21 [00171] [correction]
Soit E l'ensemble des applications $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que les restrictions $f_{|[-1,0]}$ et $f_{|[0,1]}$ soient affines.
a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b) Donner une base de E.

Dimension et codimension

Exercice 22 [00172] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, f un endomorphisme nilpotent non nul de E et p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.
Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre et en déduire que $f^n = 0$.

Exercice 23 [00173] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
On note $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}$.
a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
b) Observer que $\mathcal{C} = \left\{a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}$.
c) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

Exercice 24 [00174] [correction]
Soient H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque et D une droite vectorielle non incluse dans H.
Montrer que D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 25 [00175] [correction]
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, distinct de E.
Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?

Exercice 26 [00178] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $(I, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée et en déduire qu'il existe un polynôme non identiquement nul qui annule f.

Exercice 27 [00179] [correction]
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et G un sous-espace vectoriel de E. On pose

$$A = \{u \in \mathcal{L}(E, F) / G \subset \ker u\}$$

a) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
b) Déterminer la dimension de A.

Exercice 28 [00180] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $f \circ g = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dim E \times \dim \ker f$.

Exercice 29 [00182] [correction]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
a) Soient H et H' deux hyperplans de E. Montrer que ceux-ci possèdent un supplémentaire commun.
b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F = \dim G$.
Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 30 Centrale MP [00181] [correction]
Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
a) On suppose $\dim F_1 = \dim F_2$. Montrer qu'il existe G sous-espace vectoriel de E tel que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$.
b) On suppose que $\dim F_1 \leqslant \dim F_2$. Montrer qu'il existe G_1 et G_2 sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2 = E$ et $G_2 \subset G_1$.

Exercice 31 [00184] [correction]
Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $\vec{a} \in G$, on note

$$F_{\vec{a}} = \text{Vect}(\vec{e}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{e}_p + \vec{a})$$

a) Montrer que

$$F_{\vec{a}} \oplus G = E$$

b) Soient $\vec{a}, \vec{b} \in G$. Montrer

$$\vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow F_{\vec{a}} \neq F_{\vec{b}}$$

Exercice 32 [00187] [correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $F \cap G = \{0\}$.
On suppose

$$\text{codim} F = \dim G < +\infty$$

Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 33 Mines-Ponts MP [02677] [correction]
Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension finie p sur $\mathbb{L}$.
Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie q sur $\mathbb{L}$. Relier n, p, q.

Exercice 34 [00176] [correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$.
Montrer que si F est de codimension finie alors G aussi et $\text{codim} G \leqslant \text{codim} F$

Exercice 35 [03182] [correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de codimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On suppose

$$F \subset G \text{ et } \text{codim} F = \text{codim} G$$

Montrer $F = G$.

Exercice 36 [00177] [correction]
Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On suppose que $F \subset G$. Montrer que F est de codimension finie dans E si, et seulement si, F est de codimension finie dans G et que G est de codimension finie dans E. Observer qu'alors

$$\text{codim}_G F + \text{codim}_E G = \text{codim}_E F$$

Exercice 37 Mines-Ponts MP [02678] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de F. On suppose que G est de codimension finie dans E.
Montrer que

$$\text{codim}_E G = \text{codim}_E F + \text{codim}_F G$$

Exercice 38 X MP [02909] [correction]
Soient E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
a) Montrer que si F_1 et F_2 ont un supplémentaire commun alors ils sont isomorphes.
b) Montrer que la réciproque est fausse.

Rang d'une application linéaire

Exercice 39 [00189] [correction]
Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que $u + v = \text{id}$ et $\text{rg}u + \text{rg}v \leqslant n$.
Montrer que u et v sont des projecteurs.

Exercice 40 Mines-Ponts MP [02682] [correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Montrer que

$$|\text{rg}f - \text{rg}g| \leqslant \text{rg}(f + g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g$$

Exercice 41 [00201] [correction]
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer

$$\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\} \\ \ker f + \ker g = E \end{cases}$$

Exercice 42 [00191] [correction]
Soit f et g deux endomorphismes de E. Montrer que :
a) $\text{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\text{rg} f, \text{rg} g)$.
b) $\text{rg}(f \circ g) \geqslant \text{rg} f + \text{rg} g - \dim E$.

Exercice 43 [02467] [correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
a) Montrer que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}g \Leftrightarrow E = \text{Im}f + \ker g$.
b) Montrer que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}f \Leftrightarrow \text{Im}f \cap \ker g = \{0\}$.

Exercice 44 [00195] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Etablir que

$$\dim \ker(g \circ f) \leqslant \dim \ker g + \dim \ker f$$

Exercice 45 [00192] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Former une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\text{Im}u = F$ et $\ker u = G$.

Exercice 46 [00194] [correction]
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim \ker f \cap F \geqslant \dim F - \text{rg}f$.

Exercice 47 [00196] [correction]
On dit qu'une suite d'applications linéaires $\{0\} \xrightarrow{u_0} E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} E_n \xrightarrow{u_n} \{0\}$ est exacte si on a $\text{Im}u_k = \ker u_{k+1}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que si tous les E_k sont de dimension finie, on a la formule dite d'Euler-Poincaré : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$.

Exercice 48 [00197] [correction]
[Images et noyaux itérés d'un endomorphisme]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_p = \mathrm{Im} f^p \text{ et } N_p = \ker f^p$$

a) Montrer que les suites $(I_p)_{p\geqslant 0}$ et $(N_p)_{p\geqslant 0}$ sont respectivement décroissante et croissante et que celles-ci sont simultanément stationnaires.
b) On note r le rang à partir duquel les deux suites sont stationnaires. Montrer que $I_r \oplus N_r = E$.

Exercice 49 [00199] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie
Montrer que

$$\exists g \in \mathcal{L}(E), f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \ker f$$

Exercice 50 [00503] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer

$$\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E), g = f \circ h$$

Exercice 51 [00202] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer

$$\ker f \subset \ker g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E), g = h \circ f$$

Exercice 52 [00185] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
Résoudre l'équation $u \circ f = v$ d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

Exercice 53 [00200] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On note $A_F = \{f \in \mathcal{L}(E)/\mathrm{Im} f \subset F\}$ et
$B_F = \{f \in \mathcal{L}(E)/F \subset \ker f\}$.
a) Montrer que A_F et B_F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ et calculer leurs dimensions.
b) Soient u un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par
$\varphi(f) = u \circ f$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Déterminer
$\dim \ker \varphi$.
c) Soit $v \in \mathrm{Im}\varphi$. Etablir que $\mathrm{Im} v \subset \mathrm{Im} u$. Réciproque ? Déterminer $\mathrm{rg}\varphi$.

Exercice 54 [00203] [correction]
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(F, E)$.
Exprimer la dimension de $\{g \in \mathcal{L}(E, F)/f \circ g \circ f = 0\}$ en fonction du rang de f et des dimensions de E et F.

Exercice 55 Centrale MP [02379] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que $\mathrm{rg} f^2 = 3$. Quels sont les rangs possibles pour f ?

Exercice 56 [03242] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition et contenant l'endomorphisme Id_E.
Montrer que $F \cap \mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$

Dualité

Exercice 57 [03131] [correction]
Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe
$(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique vérifiant

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k)$$

Exercice 58 [00210] [correction]
Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $f_0, \ldots, f_n$ les formes linéaires sur $E = \mathbb{K}_n[X]$ déterminées par

$$f_i(P) = P(a_i)$$

Etablir que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base du dual de E et déterminer sa base antéduale.

Exercice 59 [03132] [correction]
Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par

$$\varphi_1(P) = P(1), \varphi_2(P) = P'(1) \text{ et } \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa base antéduale.

Exercice 60 [00211] [correction]
Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère les formes linéaires $f_0, \dots, f_n$ déterminées par

$$f_j(P) = \int_0^1 x^j P(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une base du dual de E.
b) Dans le cas $n = 2$, déterminer la base antéduale de (f_0, f_1, f_2).

Exercice 61 Mines-Ponts MP [02685] [correction]
Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts. On note F_j l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F_j(P) = \int_0^{a_j} P$$

Montrer que $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^\star$.

Exercice 62 [03139] [correction]
Soit H un hyperplan du dual $E^\star$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$.
Montrer qu'il existe $x \in E$ vérifiant

$$\forall \varphi \in E^\star, \varphi \in H \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$$

Exercice 63 [03140] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Montrer

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow \exists \varphi \in E^\star, \varphi(x) \neq \varphi(y)$$

Exercice 64 [00209] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer

$$\exists x \in E, f(x)g(x) \neq 0$$

Exercice 65 [00208] [correction]
Soient $f, g \in E^\star$ telles que $\ker f = \ker g$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = \alpha g$.

Exercice 66 [00206] [correction]
Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 67 [00205] [correction]
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que

$$\forall f \in E^\star, f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exercice 68 [00207] [correction]
Soient $f_1, \dots, f_n$ et f des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que

$$f \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f$$

Exercice 69 Mines-Ponts MP [03148] [correction]
Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$.
Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre si, et seulement si,

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists x \in E, \forall 1 \leqslant j \leqslant p, \varphi_j(x) = \lambda_j$$

Exercice 70 Mines-Ponts MP [02684] [correction]
Soit E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, de dimensions finies ou non. Montrer que $(E \times F)^\star$ et $E^\star \times F^\star$ sont isomorphes.

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Exercice 71 [00212] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}$.
Montrer

$$\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = E$$

Exercice 72 [00214] [correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = f \text{ et } f \circ g \circ f = g$$

a) Montrer que $\ker f = \ker g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$.
On pose

$$F = \ker f = \ker g \text{ et } G = \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$$

b) Montrer que

$$E = F \oplus G$$

Exercice 73 [00213] [correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} g$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 74 [00215] [correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = g \text{ et } f \circ g \circ f = f$$

a) Montrer que

$$\mathrm{Im} f \oplus \ker g = E$$

b) Justifier que

$$f(\mathrm{Im} g) = \mathrm{Im} f$$

Exercice 75 [00223] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant

$$\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$$

a) Etablir $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$ et $\ker f^2 = \ker f$.
b) Montrer que $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = E$.

Exercice 76 [00224] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose

$$\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g = \ker f + \ker g = E$$

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 77 [00190] [correction]
Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \text{ et } F' \subset G$$

Montrer que

$$F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$$

Exercice 78 [00216] [correction]
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec $\dim E < +\infty$) nilpotent et $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u^p = 0$.
a) Etablir que pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\ker u^k = \ker u^{k-1} \oplus F_k$.
b) Etablir que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
c) Observer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

Exercice 79 [00217] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note

$$F_i = \{P \in E / \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels et que

$$E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$$

Exercice 80 [00218] [correction]
Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$f_1 + \dots + f_n = \mathrm{Id} \text{ et } \forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, f_i \circ f_j = 0$$

a) Montrer que chaque f_i est une projection vectorielle.
b) Montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im} f_i = E$.

Exercice 81 [00219] [correction]
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \dots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut Id_E. On note $F_1, \dots, F_m$ les images de $p_1, \dots, p_m$. Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$ (indice : on rappelle que le rang d'un projecteur égale sa trace).

Exercice 82 [00220] [correction]
Pour $d \in \mathbb{N}$, notons H_d l'ensemble formé des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ homogènes de degré d i.e. pouvant s'écrire comme combinaison linéaire de fonction monôme de degré d.
Montrer que $(H_d)_{0 \leqslant d \leqslant n}$ est une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe.

Exercice 83 [00221] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On suppose que $E = F_1 + \dots + F_n$.
Montrer qu'il existe $G_1, \dots, G_n$ sous-espaces vectoriels tels que : $G_i \subset F_i$ et $E = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$.

Exercice 84 [00222] [correction]
Soient $E_1, \dots, E_n$ et $F_1, \dots, F_n$ sous-espaces vectoriels de E tel que $E_i \subset F_i$ et

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

Montrer que $E_i = F_i$.

Exercice 85 Mines-Ponts MP [02680] [correction]
Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une famille $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de sous-espaces vectoriels de F.
a) Montrer que $f(\sum_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$.
b) Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe alors la somme des $f(E_i)$ est directe.
c) Montrer que $f^{-1}(\sum_{j=1}^{p} F_j) \supset \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$. Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 86 [03241] [correction]
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer que w est un isomorphisme si, et seulement si, u est injective, v est surjective et

$$\mathrm{Im} u \oplus \ker v = F$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Pour tout x non nul, la liaison de la famille $(x, f(x))$ permet d'écrire $f(x) = \lambda_x x$.
Soient x, y non nuls.
Cas (x, y) liée :
On peut écrire $y = \mu x$ et alors $f(y) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.
Cas (x, y) libre :
$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ donc $\lambda_x = \lambda_y$ par identification des scalaires facteurs dans une famille libre.
On pose λ la valeur commune des λ_x.
On a

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, f(x) = \lambda x$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 0_E$. On peut donc conclure $f = \lambda \mathrm{Id}$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F \cap G$ et $v \in F \cap H$.
Comme $u, v \in F$ on a $x \in F$ et comme $u \in G$ et $v \in H$ on a $u + v \in G + H$.
Par suite $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
L'égalité n'est pas possible, prendre F, G, H trois droites distinctes d'un même plan.
b) Soit $x \in F + (G \cap H)$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G \cap H$.
Comme $u \in F$ et $v \in G$ on a $x \in F + G$ et de même $x \in F + H$ donc $x \in (F + G) \cap (F + H)$.
L'égalité n'est pas possible, prendre à nouveau trois droites distinctes d'un même plan.

Exercice 3 : [énoncé]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G$ vaut F ou G et est évidemment un sous-espace vectoriel de E.
Inversement, supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E et $F \not\subset G$.
Il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$. Pour tout $y \in G$, $x + y \in F \cup G$ par stabilité du sous-espace vectoriel $F \cup G$. Si $x + y \in G$ alors $x = (x + y) - y \in G$ ce qui est exclu. Il reste $x + y \in F$ et alors $y = (x + y) - x \in F$. Ainsi $G \subset F$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) On remarque que si $\deg P \leqslant m$ alors $\deg \Delta(P) \leqslant m - 1$.
On en déduit $\mathrm{Im}\Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathrm{Im}\Delta^2 \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$,... puis $\Delta^{n+1} = 0$.
b) Introduisons l'endomorphisme $T : P(X) \mapsto P(X+1)$.
On a $\Delta = T - \mathrm{Id}$ et par la formule du binôme de Newton (T et Id commutent), $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} T^k = 0$.
Ainsi pour $a_k = (-1)^k \binom{n+1}{k}$, on a $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k) = 0$.

Exercice 5 : [énoncé]
a) Il est clair que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-génératrice.
Montrons qu'elle est libre en raisonnant par l'absurde.
Supposons $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ non tous nuls.
Quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ non tous nuls.
Quitte à factoriser, on peut aussi supposer $\mathrm{pgcd}(a, b, c, d) = 1$.
On a $\left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = \left(c\sqrt{3} + d\sqrt{6}\right)^2$ donc $a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 3c^2 + 6cd\sqrt{2} + 6d^2$.
Par l'irrationalité de $\sqrt{2}$ on parvient au système $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3c^2 + 6d^2 \\ ab = 3cd \end{cases}$.
Par suite $3 \mid ab$ et $3 \mid a^2 + 2b^2$ donc $3 \mid a$ et $3 \mid b$.
Ceci entraîne $3 \mid cd$ et $3 \mid c^2 + 2d^2$ donc $3 \mid c$ et $3 \mid d$.
Ceci contredit $\mathrm{pgcd}(a, b, c, d) = 1$.
Ainsi la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-libre et c'est donc une $\mathbb{Q}$-base de K.
b) Sans peine, on vérifie que $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
Soit $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{K}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ non tous nuls.
$\frac{1}{x} = \frac{1}{(a+b\sqrt{2})+(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})} = \frac{a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})}{(a^2+2b^2-3c^2-6d^2)+2(ab-3cd)\sqrt{2}} = \frac{a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})}{\alpha+\beta\sqrt{2}}$
puis $\frac{1}{x} = \frac{(a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6}))(\alpha-\beta\sqrt{2})}{\alpha^2-2\beta^2} \in K$ et donc K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
Notons que les quantités conjuguées par lesquelles on a ci-dessus multiplié ne sont pas nuls car x est non nul et la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Exercice 6 : [énoncé]
Supposons φ solution.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ on peut écrire

$$P = (X-a)(X-b)Q(X) + \alpha X + \beta$$

En évaluant cette identité en a et b, on détermine α et β

$$\alpha = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} \text{ et } \beta = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$$

Par linéarité de φ on obtient

$$\varphi(P) = \varphi(\alpha X + \beta) = \alpha X + \beta$$

car $\varphi\left((X - a)(X - b)Q(X)\right) = 0$.
Ainsi

$$\varphi(P) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} X + \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$$

ce qui détermine φ de façon unique.
Inversement, on vérifie aisément que l'application φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par la relation précédente est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ résolvant le problème posé.

Exercice 7 : [énoncé]
Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$. Considérons le sous-espace vectoriel

$$F = \ker u^{k+\ell}$$

et introduisons l'application linéaire restreinte $v : F \to E$ définie par

$$\forall x \in F, v(x) = u^{\ell}(x)$$

On vérifie aisément

$$\ker v \subset \ker u^{\ell} \text{ et } \mathrm{Im} v \subset \ker u^{k}$$

La formule du rang appliquée à v donne

$$\dim\left(\ker u^{k+\ell}\right) = \mathrm{rg} v + \dim \ker v$$

ce qui donne

$$\dim\left(\ker u^{k+\ell}\right) \leqslant \dim\left(\ker u^{k}\right) + \dim\left(\ker u^{\ell}\right)$$

Exercice 8 : [énoncé]
a) $u^{-1}(u(F))$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et $\ker u$ donc

$$F + \ker u \subset u^{-1}(u(F))$$

Inversement, soit $x \in u^{-1}(u(F))$. On a $u(x) \in u(F)$ donc il existe $a \in F$ tel que $u(x) = u(a)$ et alors pour $b = x - a$ on a $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in \ker u$. Ainsi

$$u^{-1}(u(F)) = F + \ker u$$

b) $u(u^{-1}(F))$ est un sous-espace vectoriel de E inclus dans F et dans $\mathrm{Im} u$ donc

$$u(u^{-1}(F)) \subset F \cap \mathrm{Im} u$$

Inversement, soit $x \in F \cap \mathrm{Im} u$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. Or, puisque $x \in F$, $a \in u^{-1}(F)$ et donc $x = u(a) \in u(u^{-1}(F))$. Ainsi

$$u(u^{-1}(F)) = F \cap \mathrm{Im} u$$

c) On a $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$ si, et seulement si,

$$F + \ker u = F \cap \mathrm{Im} u$$

Si cette condition est vérifiée alors

$$F \subset F + \ker u = F \cap \mathrm{Im} u \subset F$$

et donc

$$F = F + \ker u = F \cap \mathrm{Im} u$$

ce qui entraîne

$$\ker u = \{0\} \text{ et } F \subset \mathrm{Im} u$$

Inversement, si ces conditions sont vérifiées, on a immédiatement $F + \ker u = F = F \cap \mathrm{Im} u$.
Finalement $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$ si, et seulement si, F est inclus dans l'image d'un endomorphisme injectif.

Exercice 9 : [énoncé]
Les inclusions suivantes sont toujours vraies

$$F \subset h^{-1}(h(F)) \text{ et } h(h^{-1}(F) \subset F$$

Si $h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$ alors

$$h^{-1}(h(F)) = F \text{ et } h(h^{-1}(F)) = F$$

Les inclusions $h^{-1}(h(F)) \subset F$ et $F \subset h(h^{-1}(F))$ entraînent respectivement $\ker h \subset F$ et $F \subset \mathrm{Im} h$.
Inversement, supposons

$$\ker h \subset F \subset \mathrm{Im} h$$

Pour $x \in h^{-1}(h(F))$, il existe $a \in F$ tel que $h(x) = h(a)$. On a alors $x - a \in \ker h \subset F$ et donc $x = a + (x - a) \in F$. Ainsi $h^{-1}(h(F)) \subset F$ puis $h^{-1}(h(F)) = F$
Aussi pour $y \in F \subset \mathrm{Im} h$, il existe $a \in E$ tel que $y = h(a)$ et puisque $y \in F$, $a \in h^{-1}(F)$. Ainsi $F \subset h(h^{-1}(F))$ puis $F = h(h^{-1}(F))$.
Finalement

$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) Supposons $\ker p = \ker q$. On a

$$p \circ q - p = p \circ (q - \mathrm{Id})$$

Or $\mathrm{Im}(q - \mathrm{Id}) = \ker q$ donc $\mathrm{Im}(q - \mathrm{Id}) \subset \ker p$ puis

$$p \circ q - p = 0$$

Ainsi $p \circ q = p$ et de même on obtient $q \circ p = q$.
Inversement, si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ alors $\ker q \subset \ker p$ et $\ker p \subset \ker q$ d'où l'égalité $\ker p = \ker q$.
b) Supposons $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}q$. On a $\ker(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}q$ donc $(p - \mathrm{Id}) \circ q = 0$ d'où $p \circ q = q$. Et de façon semblable, $q \circ p = p$.
Inversement, l'égalité $p \circ q = q$ entraîne $\mathrm{Im}q \subset \mathrm{Im}p$ et l'égalité $q \circ p = p$ entraîne $\mathrm{Im}p \subset \mathrm{Im}q$. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante cherchée est

$$p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) ($\Leftarrow$) Supposons $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$. $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$.
($\Rightarrow$) Supposons $p + q$ projecteur. Par les mêmes calculs que ci-dessus $p \circ q + q \circ p = \tilde{0}$.
En composant cette relation avec p à droite et à gauche, on obtient $p \circ q \circ p + q \circ p = \tilde{0}$ et $p \circ q + p \circ q \circ p = \tilde{0}$. On en déduit $q \circ p = p \circ q$ puis $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.
b) On a évidemment $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$.
Inversement, pour $x \in \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$, on a $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}p$ et $b \in \mathrm{Im}q$.
Puisque $p \circ q = 0$, $p(b) = 0$ et donc $p(x) = p(a) = a$. De même $q(x) = b$ et donc $x = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}(p+q)$.
Ainsi $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$
On a évidemment $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$
Inversement pour $x \in \ker(p+q)$, on a $p(x) + q(x) = 0$ donc $p^2(x) + p(q(x)) = 0$ puis $p(x) = 0$ car $p^2 = p$ et $p \circ q = 0$. Ainsi $x \in \ker p$ et de même $x \in \ker q$.
Finalement $\ker p \cap \ker q = \ker(p+q)$.

Exercice 12 : [énoncé]
a) $r^2 = (p + q - q \circ p)^2 = (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p)$
En développant et en exploitant $p \circ q = 0$ on obtient,
$r^2 = p^2 + q \circ p + q^2 - q^2 \circ p - q \circ p^2$
En exploitant $p^2 = p$ et $q^2 = q$, on parvient à $r^2 = r$ donc r est un projecteur.
b) Pour tout $x \in E$, $r(x) = p(x) + q(x - p(x)) \in \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$ donc $\mathrm{Im}r \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$.
Inversement, si $x \in \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}p$ et $b \in \mathrm{Im}q$.
Puisque $p \circ q = 0$, on a $p(b) = 0$ et puisque $a \in \mathrm{Im}p$, on a $p(a) = a$.
Ainsi $p(x) = a$ et donc $b = x - a = x - p(x)$.
Or $b \in \mathrm{Im}q$ donc $b = q(b)$ puis $b = q(x - p(x)) = q(x) - p(q(x))$.
Finalement $x = a + b = p(x) + q(x) - p(q(x)) = r(x)$ et donc $x \in \mathrm{Im}r$.
Ainsi $\mathrm{Im}r = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$.
Soit $x \in \ker p \cap \ker q$, on a $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0$ donc $x \in \ker r$.
Inversement, soit $x \in \ker r$.
On a $p(x) + q(x - p(x)) = 0$ donc $p(x) = p(p(x)) = p(q(x - p(x))) = 0$ car $p \circ q = 0$.
Ainsi $x \in \ker p$. De plus $p(x) + q(x - p(x)) = 0$ sachant $p(x) = 0$ donne $q(x) = 0$ et donc $x \in \ker q$.
Finalement $\ker r \subset \ker p \cap \ker q$ puis $\ker r = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Si $x \in \ker p$ alors $p(u(x)) = u(x) + u(p(x)) = u(x)$ donc $u(x) \in \mathrm{Im}p$. Ainsi $u(\ker p) \subset \mathrm{Im}p$.
Si $x \in \mathrm{Im}p$ alors $p(x) = x$ donc $u(x) = p(u(x)) - u(p(x)) = p(u(x)) - u(x)$ d'où $2u(x) = p(u(x))$. Par suite $u(x) \in \mathrm{Im}p$ donc $p(u(x)) = u(x)$ et enfin la relation précédente donne $u(x) = 0$. Ainsi $x \in \ker u$.
b) Pour $x \in E$, $u(x) = u(p(x)) + u(x - p(x))$.
Or $u(p(x)) = 0$ car $\mathrm{Im}p \subset \ker u$ et $u(x - p(x)) \in u(\ker p) \subset \mathrm{Im}p \subset \ker u$ donc $u^2(x) = 0$.
c) Supposons $u^2 = 0$. On a $\mathrm{Im}u \subset \ker u$. Soit p une projection sur $\mathrm{Im}u$. On a $p \circ u = u$ car les vecteurs de $\mathrm{Im}u$ sont invariants par p et on a $u \circ p = 0$ car $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}u \subset \ker u$. Ainsi, il existe une projection p pour laquelle $u = p \circ u - u \circ p$.
La réciproque est vraie.

Exercice 14 : [énoncé]
$p \circ p = p \circ (q \circ p) = (p \circ q) \circ p = q \circ p = p$ et donc p est un projecteur. De même q est un projecteur et donc p et q sont diagonalisables. Si p et q sont codiagonalisables alors p et q commutent et donc $p = q \circ p = p \circ q = q$. Réciproque immédiate.

Exercice 15 : [énoncé]
a) $(v \circ u)^2 = v \circ \mathrm{Id}_F \circ u = v \circ u$ donc $v \circ u$ est un projecteur.
b) Le rang d'un projecteur est égal à sa trace donc

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{tr}(v \circ u) = \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_F) = p$$

On a

$$\mathrm{Im}(v\circ u)\subset \mathrm{Im}v \text{ et } \dim \mathrm{Im}(v\circ u)=\mathrm{rg}(v\circ u)=p\geqslant \mathrm{rg}(v)=\dim \mathrm{Im}v$$

On en déduit

$$\mathrm{Im}(v\circ u)=\mathrm{Im}v$$

On a

$$\ker u\subset \ker(v\circ u) \text{ et } \dim\ker u=n-\mathrm{rg}u\geqslant n-p=n-\mathrm{rg}(v\circ u)=\dim\ker(v\circ u)$$

donc

$$\ker(v\circ u)=\ker u$$

Exercice 16 : [énoncé]
Si f est un projecteur alors f est la projection sur $\mathrm{Im}f$ parallèlement à $\ker f$ tandis que $\mathrm{Id}-f$ est la projection complémentaire sur $\ker f$ parallèlement à $\mathrm{Im}f$.
On en déduit

$$\mathrm{rg}f+\mathrm{rg}(\mathrm{Id}-f)=\mathrm{rg}f+\dim\ker f=n$$

en vertu de la formule du rang.
Inversement, supposons

$$\mathrm{rg}f+\mathrm{rg}(\mathrm{Id}-f)=n$$

Posons $F=\mathrm{Im}f$ et $G=\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-f)$.
Pour tout $x\in E$, on a

$$x=f(x)+(x-f(x))\in F+G$$

donc $E\subset F+G$ puis $E=F+G$.
Or $\dim F+\dim G=\mathrm{rg}f+\mathrm{rg}(\mathrm{Id}-f)=\dim E$ donc $E=F\oplus G$ et la décomposition d'un vecteur x en la somme de $f(x)\in F$ et de $x-f(x)\in G$ est unique. Puisque f apparaît comme associant à x le vecteur de F dans sa décomposition en somme d'un vecteur de F et de G, on peut affirmer que f est la projection du F parallèlement à G.

Exercice 17 : [énoncé]
Soient $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. Supposons $\lambda_1 f_{a_1}+\cdots+\lambda_n f_{a_n}=0$. Pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, si $\lambda_i\neq 0$ alors $\lambda_1 f_{a_1}+\cdots+\lambda_n f_{a_n}$ n'est pas dérivable en a_i alors que la fonction nulle l'est.
Nécessairement $\lambda_i=0$ et la famille étudiée est donc libre.

Exercice 18 : [énoncé]
Montrons que toute sous-famille finie à n éléments de $(e_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre.
Par récurrence sur $n\geqslant 1$. Pour $n=1$: ok Supposons la propriété établie au rang $n\geqslant 1$.
Soient $a_1,\dots,a_{n+1}$ complexes distincts et supposons $\lambda_1 e_{a_1}+\cdots+\lambda_{n+1}e_{a_{n+1}}=0$ (1). En dérivant cette relation :
$a_1\lambda_1 e_{a_1}+\cdots+a_{n+1}\lambda_{n+1}e_{a_{n+1}}=0$ (2). La combinaison linéaire $a_{n+1}(1)-(2)$ donne $\lambda_1(a_{n+1}-a_1)e_{a_1}+\cdots+\lambda_n(a_{n+1}-a_n)e_{a_n}=0$. Par hypothèse de récurrence et en exploitant que les a_i sont deux à deux distincts, on obtient $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ puis ensuite aisément $\lambda_{n+1}=0$. Récurrence établie.

Exercice 19 : [énoncé]
Montrons que toute sous-famille finie à n éléments de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}^+}$ est libre.
Par récurrence sur $n\geqslant 1$.
Pour $n=1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n\geqslant 1$.
Soient $a_1,\dots,a_{n+1}$ des réels positifs distincts et supposons

$$\lambda_1 f_{a_1}+\cdots+\lambda_{n+1}f_{a_{n+1}}=0 \ (1)$$

En dérivant 2 fois cette relation :

$$a_1^2\lambda_1 f_{a_1}+\cdots+a_{n+1}^2\lambda_{n+1}f_{a_{n+1}}=0 \ (2)$$

La combinaison $a_{n+1}^2(1)-(2)$ donne

$$\lambda_1(a_{n+1}^2-a_1^2)f_{a_1}+\cdots+\lambda_n(a_{n+1}^2-a_n^2)f_{a_n}=0$$

Par hypothèse de récurrence et en exploitant que les a_i^2 sont deux à deux distincts, on obtient $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ puis ensuite aisément $\lambda_{n+1}=0$. Récurrence établie.

Exercice 20 : [énoncé]
Supposons $\lambda_1\ln p_1+\cdots+\lambda_n\ln p_n=0$ avec $\lambda_k\in\mathbb{Q}$. En réduisant au même dénominateur on parvient à :
$a_1\ln p_1+\cdots+a_n\ln p_n=0$ avec $a_k\in\mathbb{Z}$ puis $\ln\prod_k p_k^{a_k}=0$ et enfin
$\prod_{k/a_k\geqslant 0}p_k^{a_k}=\prod_{k/a_k<0}p_k^{-a_k}$. L'unicité de la décomposition primaire d'un entier permet alors de conclure $a_k=0$ pour tout k.

Exercice 21 : [énoncé]
a) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.
b) $x\mapsto 1$, $x\mapsto x$ et $x\mapsto |x|$ forment une base de E.

Exercice 22 : [énoncé]
Soit $x\notin\ker f^{p-1}$. Il en existe car $f^{p-1}\neq 0$.
Supposons $\lambda_0 x+\lambda_1 f(x)+\cdots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(x)=0$.
En composant par f^{p-1} la relation ci-dessus, on obtient $\lambda_0 f^{p-1}(x)=0$. Il s'en suit $\lambda_0=0$.
En composant par $f^{p-2},\ldots,f^0$ la relation initiale, on obtient successivement $\lambda_1=0$,..., $\lambda_{p-1}=0$.
La famille $(x,f(x),\ldots,f^{p-1}(x))$ est donc libre or elle est composée de p vecteurs en dimension n on a donc $p\leqslant n$ puis $f^n=f^{n-p}\circ f^p=0$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) $\mathcal{C}\subset\mathcal{L}(E)$, $0\in\mathcal{C}$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\forall g,h\in\mathcal{C}$ on a
$f\circ(\lambda g+\mu h)=\lambda(f\circ g)+\mu(f\circ h)=\lambda(g\circ f)+\mu(h\circ f)=(\lambda g+\mu h)\circ f$ donc $\lambda g+\mu h\in\mathcal{C}$.
b) Soit $g=a_0\mathrm{Id}+a_1f+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}$.
On a $g\circ f=a_0f+a_1f^2+\cdots+a_{n-1}f^n=f\circ g$ donc $g\in\mathcal{C}$.
Ainsi $\left\{a_0\mathrm{Id}+a_1f+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}\mid a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{K}\right\}\subset\mathcal{C}$.
Inversement, soit $g\in\mathcal{C}$.
Puisque $(x_0,f(x_0),\ldots,f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, il existe $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{K}$ tels que : $g(x_0)=a_0x_0+a_1f(x_0)+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}(x_0)$. Introduisons $h=a_0\mathrm{Id}+a_1f+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}$.
$g,h\in\mathcal{C}$ et $g(x_0)=h(x_0)$ donc $g(f(x_0))=f(g(x_0))=f(h(x_0))=h(f(x_0))$ et de manière plus générale : $g(f^k(x_0))=f^k(g(x_0))=f^k(h(x_0))=h(f^k(x_0))$.
Ainsi g et h prennent mêmes valeurs sur la base $(x_0,f(x_0),\ldots,f^{n-1}(x_0))$ donc $g=h$.
Ainsi $\mathcal{C}\subset\left\{a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f+a_0\mathrm{Id}\mid a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{K}\right\}$ puis l'égalité.
c) On a $\mathcal{C}=\mathrm{Vect}(\mathrm{Id},f,f^2,\ldots,f^{n-1})$.
De plus si $a_0\mathrm{Id}+a_1f+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}=0$ alors en évaluant en x_0 :
$a_0x_0+a_1f(x_0)+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}(x_0)=\vec{o}$ or la famille $(x_0,f(x_0),\ldots,f^{n-1}(x_0))$ est libre donc $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$.
La famille $(\mathrm{Id},f,f^2,\ldots,f^{n-1})$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{C}$, c'est donc une base de $\mathcal{C}$.
Par suite $\dim\mathcal{C}=n$.

Exercice 24 : [énoncé]
Bien entendu $H\cap D=\{0\}$ mais ici aucun argument de dimension ne permet de conclure directement.
Soit φ une forme linéaire dont H est le noyau et u un vecteur non nul de D. Il est clair que $\varphi(u)\neq 0$ et alors pour tout $x\in E$, on peut écrire $x=a+b$ avec $a=\frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u\in D$ et $b=x-a\in H$. Ainsi $E=D+H$ et on peut conclure.

Exercice 25 : [énoncé]
Posons $n=\dim E$ et $p=\dim F$.
Soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_p)$ une base de F que l'on complète en $(e_1,\ldots,e_n)$ base de E.
Posons
$$H_i=\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_n)$$
Par double inclusion, on montre
$$F=\bigcap_{i=p+1}^{n}H_i$$
On ne peut construire une intersection avoir moins d'hyperplans car on peut montrer par récurrence que l'intersection de q hyperplans est de dimension supérieure à $n-q$.
Ainsi, le nombre minimum d'hyperplans intersecté pour écrire F est de $n-p$.

Exercice 26 : [énoncé]
Si $\dim E=n$ alors $\dim\mathcal{L}(E)=n^2$ donc la famille $(I,f,f^2,\ldots,f^{n^2})$ est liée car formée de n^2+1 élément. Une relation linéaire sur les éléments de cette famille donne immédiatement un polynôme annulateur non nul.

Exercice 27 : [énoncé]
a) Si u et v s'annulent sur G, il en est de même pour $\lambda u+\mu v$.
b) Soit H un supplémentaire de G dans E. L'application $\varphi:u\mapsto u_{\restriction H}$ définie un isomorphisme entre A et $\mathcal{L}(H,F)$. En effet la connaissance d'une application linéaire sur deux espaces supplémentaires la caractérise entièrement, ici $u_{\restriction G}=0$ et donc $u_{\restriction H}$ détermine u. Par suite $\dim A=(\dim E-\dim G)\times\dim F$.

Exercice 28 : [énoncé]
Posons $F=\{g\in\mathcal{L}(E)/f\circ g=0\}$. Soit $g\in\mathcal{L}(E)$. On a clairement $g\in F\Leftrightarrow\mathrm{Im}g\subset\ker f$. Par conséquent $F=\mathcal{L}(E,\ker f)$ d'où la dimension.

Exercice 29 : [énoncé]
a) Si $H = H'$ alors n'importe quel supplémentaire de H est convenable et il en existe.
Sinon, on a $H \not\subset H'$ et $H' \not\subset H$ donc il existe $x \in H$ et $x' \in H'$ tels que $x \notin H'$ et $x' \notin H$.
On a alors $x + x' \notin H \cup H'$ et par suite $\text{Vect}(x + x')$ est supplémentaire commun à H et H'.
b) Raisonnons par récurrence décroissante sur
$n = \dim F = \dim G \in \{0, 1, \ldots, \dim E\}$.
Si $n = \dim E$ et $n = \dim E - 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n + 1 \in \{1, \ldots, \dim E\}$.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension n.
Si $F = G$ alors n'importe quel supplémentaire de F est convenable.
Sinon, on a $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ donc il existe $x \in F$ et $x' \in G$ tels que $x \notin G$ et $x' \notin F$.
On a alors $x + x' \notin F \cup G$.
Posons $F' = F \oplus \text{Vect}(x + x')$ et $G' = G \oplus \text{Vect}(x + x')$.
Comme $\dim F' = \dim G' = n + 1$, par HR, F' et G' possède un supplémentaire commun H et par suite $H \oplus \text{Vect}(x + x')$ est supplémentaire commun à F et G.
Récurrence établie.

Exercice 30 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $p = \dim E - \dim F_1$.
Si $p = \dim E - \dim F_1$ alors $G = \{0\}$.
Supposons la propriété établie au rang p.
Soient F_1 et F_2 de même dimension tels que $\dim E - \dim F_1 = p + 1$.
Si $F_1 = F_2$ l'existence d'un supplémentaire à tout sous-espace vectoriel en dimension finie permet de conclure.
Sinon, on a $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$ ce qui assure l'existence de $x_1 \in F_1 \backslash F_2$ et de $x_2 \in F_2 \backslash F_1$.
Le vecteur $x = x_1 + x_2$ n'appartient ni à F_1, ni à F_2. On pose alors $F_1' = F_1 \oplus \text{Vect}(x)$ et $F_2' = F_2 \oplus \text{Vect}(x)$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à F_1' et F_2' : on obtient l'existence d'un supplémentaire commun G' à F_1' et F_2'. $G = G' \oplus \text{Vect}(x)$ est alors supplémentaire commun à F_1 et F_2.
Récurrence établie.
b) Soit F_1' un sous-espace vectoriel contenant F_1 et de même dimension que F_2. F_1' et F_2 possèdent un supplémentaire commun G. Considérons H un supplémentaire de F_1 dans F_1'. En posant $G_1 = H \oplus G$ et $G_2 = G$ on conclut.

Exercice 31 : [énoncé]
a) $\forall \vec{x} \in F_{\vec{a}} \cap G$, on peut écrire $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(\vec{e}_i + \vec{a})$.
Mais alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{x} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{a} \in F \cap G = \{\vec{o}\}$ donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ puis $\vec{x} = \vec{o}$.
$\forall \vec{x} \in E$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{e}_i \in F$ et $\vec{v} \in G$.
On a alors $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(\vec{e}_i + \vec{a}) + \left(\vec{v} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{a}\right) \in F_{\vec{a}} + G$.
Ainsi $F_{\vec{a}} \oplus G = E$.
b) Par contraposée :
Si $F_{\vec{a}} = F_{\vec{b}}$ alors on peut écrire $\vec{e}_1 + \vec{a} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(\vec{e}_i + \vec{b})$.
On a alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e}_i - \vec{e}_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{b} - \vec{a} \in F \cap G$ donc $\lambda_1 = 1$ et $\forall 2 \leqslant i \leqslant p, \lambda_i = 0$.
La relation initiale donne alors $\vec{e}_1 + \vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{b}$ puis $\vec{a} = \vec{b}$.

Exercice 32 : [énoncé]
Soit H un supplémentaire de F dans E. On a $\dim H = \dim G$.
Considérons p la projection sur H parallèlement à F.
$\ker p_{\restriction G} = \ker p \cap G = F \cap G = \{0\}$ donc $p_{\restriction G} : G \to H$ est injective et puisque $\dim H = \dim G < +\infty$, $p_{\restriction G}$ est un isomorphisme de G vers H.
Pour tout $x \in E$, posons $a = (p_{\restriction G})^{-1}(p(x))$ et $b = x - a$. On a $x = a + b$, $a \in G$ et $p(b) = p(x) - p(a) = p(x) - p(x) = 0$ donc $b \in \ker p = F$. Ainsi $E = G + F$.

Exercice 33 : [énoncé]
Il est facile de justifier que E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel sous réserve de bien connaître la définition des espaces vectoriels et de souligner que qui peut le plus, peut le moins...
Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ une base du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.
Considérons la famille des $(\lambda_j \vec{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$. Il est facile de justifier que celle-ci est une famille libre et génératrice du $\mathbb{L}$-espace vectoriel E. Par suite E est de dimension finie $q = np$.

Exercice 34 : [énoncé]
Si F est de codimension finie alors F admet un supplémentaire H de dimension finie.

Soit K un supplémentaire de $G \cap H$ dans H (existe car H est de dimension finie). $G \cap K = G \cap H \cap K = \{0\}$ car $K \subset H$ et $F \subset G \subset G + K$ et $H \subset G + K$ donc $E = F + H \subset G + K$. G et K sont supplémentaires, or K est de dimension finie donc G est de codimension finie et $\text{codim}G = \dim K \leqslant \dim H = \text{codim}F$ car K est sous-espace vectoriel de H.

Exercice 35 : [énoncé]
Soit K un supplémentaire de F dans E. Puisque

$$E = F \oplus K \text{ et } F \subset G$$

on a immédiatement $E = G + K$. Montrons que cette somme est directe.
L'intersection $G \cap K$ est sous-espace vectoriel de K et puisque K est de dimension finie, il existe un sous-espace vectoriel K' vérifiant

$$(G \cap K) \oplus K' = K$$

On vérifie alors

$$E = G \oplus K'$$

Or

$$\dim K' = \text{codim}G = \text{codim}F = \dim K$$

donc $K = K'$. Ainsi

$$E = G \oplus K$$

On peut alors montrer que G est inclus dans F.
Soit $x \in G$. Puisque F et K sont supplémentaires dans E, on peut écrire

$$x = x_F + x_K \text{ avec } x_F \in F \text{ et } x_K \in K$$

On a alors

$$x_K = x - x_F \in G \cap K$$

car x et x_F appartiennent à G.
On en déduit $x_K = 0$ puis $x = x_F \in F$.
Finalement $G \subset F$ puis $G = F$.

Exercice 36 : [énoncé]
Supposons que F soit de codimension finie dans E. F possède un supplémentaire de dimension finie H. Considérons alors K supplémentaire de $H \cap G$ dans H. G et K sont supplémentaires dans E et K est de dimension finie donc G est de codimension finie dans E. De plus, F et $H \cap G$ étant supplémentaires dans G, on peut dire que F est de codimension finie dans G.
Enfin la relation $\dim H = \dim K + \dim H \cap G$ se relit
$\text{codim}_E F = \text{codim}_G F + \text{codim}_E G$.
Inversement, si F est de codimension finie dans G et G de codimension finie dans E alors la somme d'un supplémentaire de F dans G et d'un supplémentaire de G dans E définit un supplémentaire de dimension finie de F dans E. On peut alors conclure.

Exercice 37 : [énoncé]
G possède un supplémentaire de dimension finie H. Considérons alors K supplémentaire de $H \cap F$ dans H. F et K sont supplémentaires dans E et K est de dimension finie donc F est de codimension finie dans E. De plus, G et $H \cap F$ étant supplémentaires dans F, on peut dire que G est de codimension finie dans F.
Enfin la relation $\dim H = \dim K + \dim H \cap G$ se relit
$\text{codim}_E G = \text{codim}_E F + \text{codim}_F G$.

Exercice 38 : [énoncé]
a) Supposons que H est un supplémentaire commun à F_1 et F_2.
Considérons la projection p sur F_1 parallèlement à H. Par le théorème du rang, p induit par restriction un isomorphisme de tout supplémentaire de noyau vers l'image de p. On en déduit que F_1 et F_2 sont isomorphes.
b) En dimension finie, la réciproque est vraie car l'isomorphisme entraîne l'égalité des dimensions des espaces et on peut alors montrer l'existence d'un supplémentaire commun (voir l'exercice d'identifiant 181)
C'est en dimension infinie que nous allons construire un contre-exemple.
Posons $E = \mathbb{K}[X]$ et prenons $F_1 = E$, $F_2 = X.E$. Les espaces F_1 et F_2 sont isomorphes via l'application $P(X) \mapsto XP(X)$. Ils ne possèdent pas de supplémentaires communs car seul $\{0\}$ est supplémentaire de F_1 et cet espace n'est pas supplémentaire de F_2.

Exercice 39 : [énoncé]
$\mathbb{K}^n = \text{Im}(u + v) \subset \text{Im}u + \text{Im}v$ donc $\text{rg}u + \text{rg}v \geqslant n$ puis $\text{rg}u + \text{rg}v = n$. Si $x \in \ker u$ alors $x = u(x) + v(x) = v(x)$ donc $x \in \text{Im}v$. Par les dimensions, on conclut $\ker u = \text{Im}v$ et de même $\ker v = \text{Im}u$. Par suite $u \circ v = v \circ u = 0$ et donc aisément $u^2 = u$ et $v^2 = v$.

Exercice 40 : [énoncé]
Facilement $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$ donc $\text{rg}(f+g) \leqslant \dim(\text{Im}f + \text{Im}g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g$.
Puisque $f = f + g + (-g)$, $\text{rg}f \leqslant \text{rg}(f+g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f+g) + \text{rg}g$.
Aussi $\text{rg}g \leqslant \text{rg}(f+g) + \text{rg}f$ donc $|\text{rg}f - \text{rg}g| \leqslant \text{rg}(f+g)$.

Exercice 41 : [énoncé]
($\Rightarrow$) Supposons $\text{rg}(f+g) = \text{rg}f + \text{rg}g$.
Sachant $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$, on a $\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g - \dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g)$ et donc $\dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g) \leqslant 0$.
Ainsi $\text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\}$.
Sachant $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$, on a
$\dim \ker f + \dim \ker g - \dim(\ker f + \ker g) \leqslant \dim \ker(f+g)$.
Par la formule du rang, on obtient alors
$\dim E + \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g + \dim(\ker f + \ker g)$ et donc
$\dim(\ker f + \ker g) \geqslant \dim E$. Ainsi $\ker f + \ker g = E$
($\Leftarrow$) Supposons $\text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\}$ et $\ker f + \ker g = E$.
Montrons $\text{Im}(f+g) = \text{Im}f + \text{Im}g$.
On sait déjà $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$.
Inversement, soit $x \in \text{Im}f + \text{Im}g$.
Il existe $a, b \in E$ tels que $x = f(a) + g(b)$.
Puisque $E = \ker f + \ker g$, on peut écrire $a = u + v$ avec $u \in \ker f$ et $v \in \ker g$. On a alors $f(a) = f(v)$.
De même, on peut écrire $g(b) = g(w)$ avec $w \in \ker f$.
On a alors $x = f(v) + g(w) = (f+g)(v+w)$ car $f(w) = 0$ et $g(v) = 0$. Ainsi $x \in \text{Im}(f+g)$.
Finalement $\text{Im}(f+g) = \text{Im}f + \text{Im}g$.
Par suite $\text{rg}(f+g) = \text{rg}f + \text{rg}g - \dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g) = \text{rg}f + \text{rg}g$.

Exercice 42 : [énoncé]
a) cf. cours
b) $\text{rg}(f \circ g) = \dim f(\text{Im}g)$.
Par le théorème du rang appliqué à l'application linéaire $f_{\restriction \text{Im}g}$,
$\dim f(\text{Im}g) + \dim \ker f_{\restriction \text{Im}g} = \dim \text{Im}g$ donc $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}g - \dim \ker f_{\restriction \text{Im}g}$.
Or $\ker f_{\restriction \text{Im}g} \subset \ker f$ donc $\dim \ker f_{\restriction \text{Im}g} \leqslant \dim E - \text{rg}f$ puis
$\text{rg}(f \circ g) \geqslant \text{rg}\, f + \text{rg}\, g - \dim E$.

Exercice 43 : [énoncé]
a) Commençons par observer $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}g$.
($\Leftarrow$) Supposons $E = \text{Im}f + \ker g$.
Soit $y \in \text{Im}g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in \text{Im}f$ et $b \in \ker g$.
On a alors $y = g(x) = g(a) + g(b) = g(a) \in \text{Im}(g \circ f)$ car $a \in \text{Im}f$.
Ainsi $\text{Im}g \subset \text{Im}(g \circ f)$ et donc $\text{Im}g = \text{Im}(g \circ f)$. Par suite $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}g$.
($\Rightarrow$) Supposons $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}g$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\text{Im}g = \text{Im}(g \circ f)$.
Soit $x \in E$ et $y = g(x)$. Puisque $y \in \text{Im}g = \text{Im}(g \circ f)$, il existe $a \in E$ tel que $y = (g \circ f)(a)$. Posons alors $b = x - f(a)$. On a $x = f(a) + b$, $f(a) \in \text{Im}f$ et $b \in \ker g$ car $g(b) = g(x) - g(f(a)) = y - (g \circ f)(a) = 0$.
Ainsi $E \subset \text{Im}f + \ker g$ puis $E = \text{Im}f + \ker g$.
b) ($\Leftarrow$) Supposons $\text{Im}f \cap \ker g = \{0\}$.
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\text{Im}f$ avec $p = \text{rg}f$.
On a $\text{Im}f = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ donc $\text{Im}(g \circ f) = \text{Vect}(g(e_1), \ldots, g(e_p))$.
Supposons $\lambda_1 g(e_1) + \cdots + \lambda_p g(e_p) = 0$.
On a $g(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda e_p) = 0$ donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda e_p \in \ker g$. Or $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda e_p \in \text{Im}f$ donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda e_p = 0$ puisque $\text{Im}f \cap \ker g = \{0\}$.
Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.
Ainsi la famille $(g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est libre et c'est donc une base de $\text{Im}(g \circ f)$.
On en déduit $\text{rg}(g \circ f) = p = \text{rg}f$.
($\Rightarrow$) Par contraposée, supposons $\text{Im}f \cap \ker g \neq \{0\}$.
Soit $e_1 \in \text{Im}f \cap \ker g$ un vecteur non nul.
La famille (e_1) est libre, on peut donc la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\text{Im}f$.
On a $\text{Im}f = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ donc $\text{Im}(g \circ f) = \text{Vect}(g(e_1), \ldots, g(e_p))$.
Or $g(e_1) = 0$ donc $\text{Im}(g \circ f) = \text{Vect}(g(e_2), \ldots, g(e_p))$ puis $\text{rg}(g \circ f) \leqslant p - 1 < p$.
Ainsi $\text{rg}(g \circ f) \neq \text{rg}f$.

Exercice 44 : [énoncé]
Par le théorème du rang,

$$\dim \ker(g \circ f) = \dim E - \text{rg}(g \circ f)$$

Or

$$\text{rg}(g \circ f) = \dim g(f(E)) = \text{rg}g_{\restriction f(E)}$$

Par le théorème du rang,

$$\text{rg}g_{\restriction f(E)} = \dim f(E) - \dim \ker g_{\restriction f(E)}$$

Or $\ker g_{\restriction f(E)} \subset \ker g$ donc

$$\text{rg}g_{\restriction f(E)} \geqslant \dim f(E) - \dim \ker g$$

Enfin, par le théorème du rang,

$$\dim f(E) = \mathrm{rg} f = \dim E - \dim \ker f$$

Au final,

$$\dim \ker(g \circ f) \leqslant \dim \ker f + \dim \ker g$$

Exercice 45 : [énoncé]
Par le théorème du rang, la condition $\dim F + \dim G = \dim E$ est nécessaire.
Montrons qu'elle est aussi suffisante.
Soit H un supplémentaire de G dans E. On a $\dim H = \dim F = p$
Soient $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base de E telle que $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_p)$ soit base de H et $(\vec{\varepsilon}_{p+1}, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ base de G.
Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F.
Une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base.
Soit $u : E \to E$ définie par : $\forall 1 \leqslant i \leqslant p, u(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{e}_i$ et $\forall p+1 \leqslant i \leqslant n, \vec{u}(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{o}$.
Par construction, il est clair que $F \subset \mathrm{Im} u$ et $G \subset \ker u$.
Par le théorème du rang et la relation $\dim F + \dim G = \dim E$, on obtient $\dim F = \mathrm{rg} u$ et $\dim G = \dim \ker u$. Par inclusions et égalités des dimensions : $F = \mathrm{Im} u$ et $G = \ker u$.

Exercice 46 : [énoncé]
Considérons $f_{\restriction F}$ restriction de f au départ de F et à l'arrivée dans E.
$\ker f_{\restriction F} = \ker f \cap F$ et $\mathrm{rg} f_{\restriction F} \leqslant \mathrm{rg} f$. L'application du théorème du rang $f_{\restriction F}$ permet alors de conclure.

Exercice 47 : [énoncé]
Le théorème du rang donne $\dim E_k = \dim \mathrm{Im} u_k + \dim \ker u_k$ donc, sachant $\dim \mathrm{Im} u_k = \dim \ker u_{k+1}$ on obtient : $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dim E_k = \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \dim \ker u_k + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dim \ker u_k = -\dim \ker u_1 = 0$ car $\mathrm{Im} u_n = \{0\}$ et $\ker u_1 = \mathrm{Im} u_0 = \{0\}$.

Exercice 48 : [énoncé]
a) $\forall y \in \mathrm{Im} f^{p+1}$, $\exists x \in E$, $y = f^{p+1}(x) = f^p(f(x)) \in \mathrm{Im} f^p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.
$\forall x \in \ker f^p$, on a $f^p(x) = 0$ donc $f^{p+1}(x) = f(0) = 0$ puis $x \in \ker f^{p+1}$. Ainsi $N_p \subset N_{p+1}$.
La suite $\dim I_p$ est une suite décroissante d'entiers naturels donc il existe un rang $s \in \mathbb{N}$ à partir duquel cette suite est stationnaire. De plus, par le théorème du rang les suites $(\dim I_p)$ et $(\dim N_p)$ sont simultanément stationnaires. Par inclusion et égalité des dimensions, les suites (I_p) et (N_p) sont simultanément stationnaires.
b) Soit $x \in I_r \cap N_r$. Il existe $u \in E$ tel que $x = f^r(u)$ et on a $f^r(x) = 0$.
Par suite $u \in N_{2r}$, or $N_{2r} = N_r$ donc $x = f^r(u) = 0$. Par suite $I_r \cap N_r = \{0\}$. De plus, par le théorème du rang : $\dim I_r + \dim N_r = \dim E$ donc I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 49 : [énoncé]
$(\Rightarrow)$ $\mathrm{Im} f \subset \ker f$ car $f^2 = 0$. Si $x \in \ker f$ alors $x = (f \circ g)(x) + 0 \in \mathrm{Im} f$ donc $\mathrm{Im} f = \ker f$.
$(\Leftarrow)$ Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Im} f$ dans E. Par le théorème du rang $\dim F = \dim \mathrm{Im} f$.
L'application $h = f_{|F} : F \to \mathrm{Im} f$ est un isomorphisme car injective en dimension finie égale.
Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par $g_{|\mathrm{Im} f} = h^{-1}$ et $g_{|F} = 0$.
$\forall x \in \mathrm{Im} f$, $(f \circ g + g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = (f \circ h^{-1})(x) = x$ car $f^2 = 0$.
$\forall x \in F$, $(f \circ g + g \circ f)(x) = (g \circ f)(x) = x$ car $g_{|F} = 0$.

Exercice 50 : [énoncé]
$(\Leftarrow)$ ok
$(\Rightarrow)$ Supposons $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im} f$. Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E. f réalise un isomorphisme φ de H vers $\mathrm{Im} f$.
Posons $h = \varphi^{-1} \circ g$. L'application h est bien définie car g est à valeurs dans $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im} f$ et φ^{-1} est définie sur $\mathrm{Im} f$. De plus, h est linéaire par composition et

$$f \circ h = f \circ \varphi^{-1} \circ g$$

Puisque φ^{-1} prend ses valeurs dans H, $f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im} f}$ puis

$$f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im} f} \circ g = g$$

Exercice 51 : [énoncé]
$(\Leftarrow)$ ok
$(\Rightarrow)$ Supposons $\ker f \subset \ker g$. Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E. f réalise un isomorphisme de H vers $\mathrm{Im} f$ noté $f_{\restriction H}$. Soient K un supplémentaire de $\mathrm{Im} f$ dans E et $h \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$h_{\restriction \mathrm{Im} f} = g \circ f_{\restriction H}^{-1} \text{ et } h_{\restriction K} = 0$$

(ou n'importe quelle autre application linéaire).
Pour tout $x \in \ker f$,
$$g(x) = 0 = (h \circ f)(x)$$
et pour tout $x \in H$,
$$(h \circ f)(x) = h(f_{\restriction H}(x)) = g(f_{\restriction H}^{-1}(f_{\restriction H}(x))) = g(x)$$
Les applications g et $h \circ f$ coïncidant sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, elles sont égales.

Exercice 52 : [énoncé]
Si $\mathrm{Im}v \not\subset \mathrm{Im}u$, il n'y a pas de solution.
Supposons $\mathrm{Im}v \subset \mathrm{Im}u$. Soit H un supplémentaire de $\ker u$ dans E. $u_{|H}$ réalise un isomorphisme de H vers $\mathrm{Im}u$. Tout $f \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit de manière unique $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 = p_H \circ f$ et $f_2 = p_{\ker u} \circ f$.
$u \circ f = v \Leftrightarrow u \circ f_1 = v \Leftrightarrow u_{|H} \circ f_1 = v \Leftrightarrow f_1 = (u_{|H})^{-1} \circ v$.
Les solutions de l'équation sont les $f = (u_{|H})^{-1} \circ v + f_2$ avec $f_2 \in \mathcal{L}(E, \ker u)$ quelconque.

Exercice 53 : [énoncé]
a) A_F et B_F sont des parties de $\mathcal{L}(E)$ contenant l'endomorphisme nul.
$\mathrm{Im}\lambda f \subset \mathrm{Im}f$ avec égalité si $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ donc A_F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Aussi $\ker f \subset \ker \lambda f$ et $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$ donc B_F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. A_F s'identifie avec $\mathcal{L}(E, F)$ donc $\dim A_F = np$. En introduisant G un supplémentaire de F dans E, B_F est isomorphe à $\mathcal{L}(G, E)$ et donc $\dim B_F = n(n-p)$.
b) φ est linéaire en vertu de la linéarité du produit de composition.
$f \in \ker \varphi \Leftrightarrow \mathrm{Im}f \subset \ker u$ donc $\ker \varphi = B_{\mathrm{Im}f}$ puis $\dim \ker \varphi = n(n - \mathrm{rg}u)$.
c) Si $v \in \mathrm{Im}\varphi$ alors il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v = u \circ f$ et donc $\mathrm{Im}v \subset \mathrm{Im}u$.
Inversement si $\mathrm{Im}v \subset \mathrm{Im}u$ alors en introduisant $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, pour tout i, il existe $f_i \in E$ tel que $v(e_i) = u(f_i)$. Considérons alors l'endomorphisme f déterminé par $f(e_i) = f_i$. On vérifie $v = u \circ f$ car ces deux applications prennent mêmes valeurs sur une base. $\mathrm{Im}\varphi = A_{\mathrm{Im}u}$ donc $\mathrm{rg}\varphi = n\mathrm{rg}u$

Exercice 54 : [énoncé]
Notons $A = \{g \in \mathcal{L}(E,F) / f \circ g \circ f = 0\} = \{g \in \mathcal{L}(E,F) / \mathrm{Im}(g_{\restriction \mathrm{Im}f}) \subset \ker f\}$
Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Im}f$ dans E.
Un élément de A est entièrement déterminée par :
– sa restriction de $\mathrm{Im}f$ à valeurs dans $\ker f$ et
– sa restriction de G à valeurs dans F.
Par suite A est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathrm{Im}f, \ker f) \times \mathcal{L}(G, F)$.
Il en découle $\dim A = \dim E \dim F - (\mathrm{rg}f)^2$.

Exercice 55 : [énoncé]
Puisque $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f \subset \mathbb{R}^6$, on a $3 \leqslant \mathrm{rg}f \leqslant 6$.
Si $\mathrm{rg}f = 6$ alors f est un isomorphisme, donc f^2 aussi et $\mathrm{rg}f^2 = 6$. Contradiction.
Si $\mathrm{rg}f = 5$ alors $\dim \ker f = 1$. Considérons $g = f_{|\mathrm{Im}f}$. Par le théorème du rang $\dim \ker g = 5 - \mathrm{rg}g$. Or $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Im}f^2$ donc $\mathrm{rg}g \leqslant 3$ et par suite $\dim \ker g \geqslant 2$. Or $\ker g \subset \ker f$ donc $\dim \ker f \geqslant 2$. Contradiction.
$\mathrm{rg}f = 3$ et $\mathrm{rg}f = 4$ sont possibles en considérant : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 56 : [énoncé]
Posons $H = F \cap \mathrm{GL}(E)$
On a immédiatement $H \subset \mathrm{GL}(E)$, $\mathrm{Id}_E \in H$ et $\forall u, v \in H, u \circ v \in H$.
Montrer que H est stable par passage à l'inverse.
Soit $u \in H$. Considérons l'application $\varphi : F \to F$ définie par
$$\varphi(v) = u \circ v$$
L'application φ est évidemment linéaire et puisque u est inversible, cette application est injective. Or F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (car sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, lui-même de dimension finie) donc φ est un automorphisme de F. Par suite l'application φ est surjective et puisque $\mathrm{Id}_E \in F$, il existe $v \in F$ tel que
$$u \circ v = \mathrm{Id}_E$$
On en déduit $u^{-1} = v \in F$ et donc $u^{-1} \in H$.

Exercice 57 : [énoncé]
Posons $\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\varphi_k(P) = P(a_k)$$

La famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est une base du dual de $\mathbb{R}_n[X]$ (on peut observer par exemple que c'est une famille libre ou encore que c'est la base duale de la base des polynômes interpolateurs de Lagrange en les a_k).
Puisque

$$\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, on peut affirmer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique vérifiant

$$\varphi = \lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_n\varphi_n$$

Exercice 58 : [énoncé]
Introduisons les polynômes $L_0, \ldots, L_n$ d'interpolation de Lagrange aux points $a_0, \ldots, a_n$. On sait que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de E. On vérifie $f_i(L_j) = \delta_{i,j}$ donc les $f_0, \ldots, f_n$ sont les formes linéaires coordonnées dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.
Il en découle que $(f_0, \ldots, f_n)$ est la base duale de $(L_0, \ldots, L_n)$ et c'est donc une base du dual de E dont $(L_0, \ldots, L_n)$ est la base antéduale.

Exercice 59 : [énoncé]
Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\varphi_1(P) = a + b + c, \varphi_2(P) = b + 2c \text{ et } \varphi_3(P) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

Considérons alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

définie de sorte que

$$Y = AX$$

avec $X = {}^t\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $Y = {}^t\begin{pmatrix} \varphi_1(P) & \varphi_2(P) & \varphi_3(P) \end{pmatrix}$.
La matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 3 \\ 6 & -2 & -6 \\ -3 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Puisque $AA^{-1} = I_n$, les colonnes de A^{-1} déterminent des colonnes X telles que $Y = AX$ est une colonne élémentaire.
On en déduit que pour

$$P_1 = -2 + 6X - 3X^2, P_2 = \frac{1}{2} - 2X + \frac{3}{2}X^2 \text{ et } P_3 = 3 - 6X + 3X^2$$

on a

$$\forall k, \ell \in \{1, 2, 3\}, \varphi_k(P_\ell) = \delta_{k,\ell}$$

On en déduit que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre et que c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la base antéduale est (P_1, P_2, P_3).

Exercice 60 : [énoncé]
a) Supposons $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$.
Considérons le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n \in E$.
En évaluant la relation $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ en P, on obtient $\int_0^1 [P(x)]^2\,\mathrm{d}x = 0$.
Par nullité de l'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction continue et positive, on peut affirmer $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Le polynôme P ayant une infinité de racines, il est nul et donc $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$.
La famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre et formée de $n + 1 = \dim E^\star$ éléments de $E^\star$, c'est donc une base de $E^\star$.
b) Si $P(X) = a + bX + cX^2$ alors

$$f_0(P) = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c, f_1(P) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c \text{ et } f_2(P) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c$$

Déterminer la base antéduale de (f_0, f_1, f_2) revient à déterminer des polynômes $P_0, P_1, P_2 \in E$ vérifiant $f_i(P_j) = \delta_{i,j}$.
Par le calcul qui précède, ce problème est immédiatement résolu une fois inversée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Par calculs,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$P_0(X) = 9 - 36X + 30X^2, P_1(X) = -36 + 192X - 180X^2 \text{ et } P_2(X) = 30 - 180X + 180X^2$$

Exercice 61 : [énoncé]
Il est clair que les F_j sont éléments de $(\mathbb{R}_n[X])^\star$ espace de dimension $n+1$. Pour conclure il suffit d'observer la liberté de la famille $(F_0,\dots,F_n)$.
Supposons $\lambda_0F_0+\dots+\lambda_nF_n=0$. En appliquant cette égalité aux polynômes $1,2X,\dots,(n+1)X^n$ on obtient les équations formant le système linéaire :

$$\begin{cases}\lambda_0a_0+\dots+\lambda_na_n=0\\ \lambda_0a_0^2+\dots+\lambda_na_n^2=0\\ \dots\\ \lambda_0a_0^{n+1}+\dots+\lambda_na_n^{n+1}=0\end{cases}.$$

Par un déterminant de Vandermonde, ce système est de Cramer ce qui entraîne $\lambda_0=\ldots=\lambda_n=0$.

Exercice 62 : [énoncé]
Soit $(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ une base de H que l'on complète en une base $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de $E^\star$.
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base de E antéduale de $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.
Le vecteur $x=e_n$ est alors solution car

$$\forall\varphi\in E^\star,\varphi=\varphi(e_1)\varphi_1+\dots+\varphi(e_{n-1})\varphi_{n-1}+\varphi(e_n)\varphi_n$$

Exercice 63 : [énoncé]
Soient $x,y\in E$ tels que $x\neq y$.
Le vecteur $x-y$ est non nul, il peut donc être complété pour former une base de E. La forme linéaire correspondant à la première application composante dans cette base est alors solution du problème posé.

Exercice 64 : [énoncé]
Si $\ker f=\ker g$ alors le résultat est immédiat.
Sinon, pour des raisons de dimension, $\ker f\not\subset\ker g$ et $\ker g\not\subset\ker f$.
La somme d'un vecteur de $\ker f$ qui ne soit pas dans $\ker g$ et d'un vecteur de $\ker g$ qui ne soit pas dans $\ker f$ est solution.

Exercice 65 : [énoncé]
Si $f=0$: ok. Sinon, on introduit $\vec u\notin\ker f$ de sorte que $\mathrm{Vect}\vec u$ et $\ker f$ soient supplémentaires puis on introduit α de sorte que $f(\vec u)=\alpha g(\vec u)$ avant de conclure via $h=f-\alpha g$ s'annule sur $\ker f$ et $\vec u$.

Exercice 66 : [énoncé]
Soit φ une forme linéaire ne s'annulant pas sur x. Celle-ci n'est pas combinaison linéaire des $(f_1,\dots,f_n)$.
Cette famille n'est donc pas génératrice et par suite elle est liée car formée de $n=\dim E^\star$ éléments de $E^\star$.

Exercice 67 : [énoncé]
Par contraposée : si $\mathcal{B}$ n'est pas une base de E alors $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)\neq E$.
Soit H un hyperplan tel que $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)\subset H$ et f une forme linéaire non nulle de noyau H.
On a $f(e_1)=\ldots=f(e_n)=0$ mais $f\neq0$.

Exercice 68 : [énoncé]
$(\Rightarrow)$ clair.
$(\Leftarrow)$ Supposons $\bigcap_{i=1}^n\ker f_i\subset\ker f$.
Si la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre alors on peut la compléter en une base $(f_1,\dots,f_N)$.
On peut écrire

$$f=\lambda_1f_1+\dots+\lambda_nf_n+\lambda_{n+1}f_{n+1}+\dots+\lambda_Nf_N$$

Notons $(e_1,\dots,e_N)$ la base de E dont $(f_1,\dots,f_N)$ est la base duale.
Puisque

$$e_{n+1},\dots,e_N\in\bigcap_{i=1}^n\ker f_i\subset\ker f$$

on a $\lambda_{n+1}=\ldots=\lambda_N=0$ donc $f\in\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_n)$.
Si la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est liée, quitte à intervertir, on peut supposer f_n combinaison linéaire des $f_1,\dots,f_{n-1}$.
On a alors

$$\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker f_i\subset\ker f_n$$

et donc

$$\bigcap_{i=1}^n\ker f_i=\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker f_i$$

Cela permet de reprendre l'exercice avec $f_1,\dots,f_{n-1}$ jusqu'à obtention d'une famille libre.

Exercice 69 : [énoncé]
Supposons la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ libre.
On peut compléter cette famille en une base $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ du dual $E^\star$ de E.
Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base de E antéduale de $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.
Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$. Pour

$$x=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_pe_p\in E$$

on vérifie aisément

$$\forall 1\leqslant j\leqslant p,\varphi_j(x)=\lambda_j$$

Inversement, supposons la propriété

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p,\exists x\in E,\forall 1\leqslant j\leqslant p,\varphi_j(x)=\lambda_j$$

Montrons que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ est libre.
Supposons

$$\alpha_1\varphi_1+\dots+\alpha_p\varphi_p=\tilde{0}$$

Par la propriété hypothèse, pour chaque $j\in\{1,\dots,p\}$, il existe $x\in E$ vérifiant

$$\forall i\in\{1,\dots,p\},\varphi_i(x)=\delta_{i,j}$$

La relation $\alpha_1\varphi_1+\dots+\alpha_p\varphi_p=\tilde{0}$ évaluée en x donne alors

$$\alpha_j=0$$

et on peut donc affirmer que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ est libre.

Exercice 70 : [énoncé]
Pour $f\in E^\star$ et $g\in F^\star$, posons $f\otimes g$ l'application définie sur $E\times F$ par $(f\otimes g)(x,y)=f(x)+g(y)$. Il est facile d'observer $f\otimes g\in(E\times F)^\star$. Considérons $\varphi:E^\star\times F^\star\to(E\times F)^\star$ définie par $\varphi(f,g)=f\otimes g$.
L'application φ est linéaire.
Si $\varphi(f,g)=0$ alors pour tout $(x,y)\in E\times F$, $f(x)+g(y)=0$.
Pour $y=0$, on peut affirmer $f=0$ et pour $x=0$, on affirme $g=0$. Ainsi $(f,g)=(0,0)$ et donc φ est injective.
Soit $h\in(E\times F)^\star$. Posons $f:x\mapsto h(x,0)$, $g:y\mapsto h(y,0)$. On vérifie aisément $f\in E^\star$, $g\in F^\star$ et $\varphi(f,g)=h$ car $h(x,y)=h(x,0)+h(0,y)$.

Exercice 71 : [énoncé]
Soit $x\in\ker(f-\mathrm{Id})\cap\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.
On a $f(x)=x$ et on peut écrire $x=(f-\mathrm{Id})(a)=f(a)-a$.
$f(x)=f^2(a)-f(a)$, $f^2(x)=f^3(a)-f^2(a)=a-f^2(a)$ puis $x+f(x)+f^2(x)=0$.
Or $x+f(x)+f^2(x)=3x$ donc $x=0$.
Soit $x\in E$.
Analyse : Supposons $x=u+v$ avec $u\in\ker(f-\mathrm{Id})$ et $v\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.
On peut écrire $v=f(a)-a$.
Ainsi $x=u+f(a)-a$, $f(x)=u+f^2(a)-f(a)$, $f^2(x)=u+a-f^2(a)$.
Donc $u=\frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x))$.
Synthèse : Posons $u=\frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x))$ et $v=x-u$.
On a $f(u)=u$ car $f^3(x)=x$ et $v=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}f(x)-\frac{1}{3}f^2(x)=$ $\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}f(x)-\frac{1}{3}f^2(x)+\frac{1}{3}f^3(x)=(f-\mathrm{Id})\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}f^2(x)\right)\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.
Finalement $\ker(f-\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})=E$.

Exercice 72 : [énoncé]
a) Si $x\in\ker f$ alors $g(x)=(f\circ g\circ f)(x)=0$ donc $x\in\ker g$. Par symétrie

$$\ker f=\ker g.$$

Si $y\in\mathrm{Im}f$ alors il existe $a\in E$ tel que $y=f(a)=(g\circ f\circ g)(a)$ donc $y\in\mathrm{Im}g$. Par symétrie

$$\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}g$$

b) Soit $x\in F\cap G$. Il existe $a\in E$ tel que $x=g(a)$ or

$$f(a)=(g\circ f\circ g)(a)=(g\circ f)(x)=g(0)=0$$

Ainsi $a\in\ker f=\ker g$ d'où $x=g(a)=0$.
Soit $x\in E$.
Analyse :
Supposons $x=u+v$ avec $u\in F=\ker f$ et $v=g(a)\in G=\mathrm{Im}g$.
On a

$$f(x)=(f\circ g)(a)$$

donc

$$(g\circ f)(x)=f(a)$$

Synthèse :
Puisque $(g\circ f)(x)\in\mathrm{Im}g=\mathrm{Im}f$, il existe $a\in E$ tel que

$$(g\circ f)(x)=f(a)$$

Posons alors $v=g(a)$ et $u=x-v$. On a immédiatement $v\in\mathrm{Im}g$ et $x=u+v$.

On a aussi $u \in \ker f$ car

$$f(u) = f(x) - f(v) \in \operatorname{Im} f$$

et

$$g(f(u)) = (g \circ f)(x) - (g \circ f \circ g)(a) = (g \circ f)(x) - f(a) = 0$$

Ainsi

$$f(u) \in \ker g \cap \operatorname{Im} f$$

puis

$$f(u) = 0$$

Exercice 73 : [énoncé]
Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$. On peut écrire $x = g(a)$ avec $a \in E$.
On a alors

$$f(g(a)) = 0$$

puis

$$x = g(a) = (g \circ f \circ g)(a) = g(0) = 0$$

Soit $x \in E$. On peut écrire $x = a + b$ avec

$$a = x - g(f(x)) \text{ et } b = g(f(x))$$

On vérifie immédiatement $b \in \operatorname{Im} g$ et on obtient $a \in \ker f$ par

$$f(a) = f(x) - f(g(f(x))) = 0$$

Exercice 74 : [énoncé]
a) Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$.
$\exists a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc $x = f(a) = (f \circ g \circ f)(a) = (f \circ g)(x) = 0$.
Soit $x \in E$.
Analyse :
Supposons $x = u + v$ avec $u = f(a) \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \ker g$.
$g(x) = g \circ f(a)$ donc $(f \circ g)(x) = f(a) = u$.
Synthèse :
Posons $u = (f \circ g)(x)$ et $v = x - u$.
On a $u \in \operatorname{Im} f$, $x = u + v$ et $g(v) = g(x) - g(u) = 0$ i.e. $x \in \ker g$.
b) On a $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$ et $\forall y \in \operatorname{Im} f$ on peut écrire $y = f(x)$ avec $x = g(a) + u$ et $u \in \ker f$.
On a alors $y = f(g(a)) \in f(\operatorname{Im} g)$.

Exercice 75 : [énoncé]
a) $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f) \Rightarrow \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ car on sait $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
Par le théorème du rang $\ker f^2 = \ker f$ car on sait $\ker f \subset \ker f^2$.
b) Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$.
On peut écrire $x = f(a)$. Comme $f(x) = 0$, on a $a \in \ker f^2 = \ker f$ donc $x = 0$.
Par le théorème du rang, on conclut.

Exercice 76 : [énoncé]
D'une part

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \dim E$$

et d'autre part

$$\dim \ker f + \dim \ker g - \dim \ker f \cap \ker g = \dim E$$

En sommant et en exploitant la formule du rang

$$\dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g + \dim \ker f \cap \ker g \leqslant 0$$

donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \ker f \cap \ker g = \{0\}$.

Exercice 77 : [énoncé]
Supposons $x + x' + y = 0$ avec $x \in F$, $x' \in F'$ et $y \in G \cap G'$.
Puisque $x' \in F' \subset G$ et $y \in G \cap G' \subset G$, on a $x' + y \in G$.
Or F et G sont en somme directe donc $x + (x' + y) = 0$ avec $x \in F$ et $x' + y \in G$ entraîne $x = 0$ et $x' + y = 0$.
Sachant $x' + y = 0$ avec $x \in F'$, $y \in G'$ et F', G' en somme directe, on a $x' = y = 0$.
Finalement $x = x' = y = 0$ et on peut affirmer que les espaces F, F' et $G \cap G'$ sont en somme directe.
Soit $a \in F$. Puisque $E = F \oplus G$, on peut écrire $a = x + b$ avec $x \in F$ et $b \in G$.
Sachant $E = F' \oplus G'$, on peut écrire $b = x' + y$ avec $x' \in F'$ et $y \in G'$.
Or $y = b - x'$ avec $b \in G$ et $x' \in F' \subset G$ donc $y \in G$ et ainsi $y \in G \cap G'$.
Finalement, on obtient $a = x + x' + y$ avec $x \in F$, $x' \in F'$ et $y \in G \cap G'$.
On peut conclure $E \subset F \oplus F' \oplus (G \cap G')$ puis $E = F \oplus F' \oplus (G \cap G')$.

Exercice 78 : [énoncé]
a) $\ker u^{k-1}$ est un sous-espace vectoriel de $\ker u^k$ et comme on se place en dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

b)
$E = \ker u^p = \ker u^{p-1} \oplus F_p = \ker u^{p-2} \oplus F_{p-1} \oplus F_p = \cdots = \ker u^0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$
avec $\ker u^0 = \{0\}$.
c) $\ker u^{k-1}$ dans $\ker u^k$. On a $E = \ker u^p = \ker u^{p-1} \oplus F_p = \ldots = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
Dans une base adaptée à cette décomposition la matrice de u est :
$\begin{pmatrix} (0) & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$ et c'est donc une matrice triangulaire supérieure stricte.

Exercice 79 : [énoncé]
Les F_i sont clairement des sous-espaces vectoriels.
Supposons $P_0 + \cdots + P_n = 0$ avec $P_i \in F_i$.
P_i possède par définition n racines et $(P_0 + \cdots + P_n)(i) = 0$ donc $P_i(i) = 0$ ce qui fournit une $n+1$ème racine. Par suite $P_i = 0$ car $\deg P_i \leqslant n$.
Soit $P \in E$.
Analyse : Supposons $P = P_0 + \cdots + P_n$ avec $P_i \in F_i$.
On a $P(i) = P_i(i)$ car $P_j(i) = 0$ pour $j \neq i$.
Par suite

$$P_i = P(i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(X-j)}{(i-j)}$$

Synthèse : Les P_i précédemment proposés conviennent car
$P_i \in F_i$ par construction et $P = P_0 + \cdots + P_n$ puisque $P - (P_0 + \cdots + P_n)$ est le polynôme nul car de degré $\leqslant n$ et possédant au moins $n+1$ racines : $0, 1, \ldots, n$.

Exercice 80 : [énoncé]
a) $f_i = f_i \circ \mathrm{Id} = f_i \circ \sum\limits_{j=1}^{n} f_j = f_i \circ f_i$ donc f_i est une projection vectorielle.
b) Supposons $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ avec $x_i \in \mathrm{Im} f_i$. En appliquant f_i : $f_i(x_i) = x_i = 0$ car $f_i(x_j) = 0$. Par suite $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Im} f_i$. Soit $x \in E$, on a $x = \mathrm{Id}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \in \mathrm{Im} f_i$ donc $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Im} f_i = E$.

Exercice 81 : [énoncé]
Puisque $p_1 + \cdots + p_m = \mathrm{Id}_E$, on a pour tout $x \in E$,
$x = p_1(x) + \cdots + p_m(x) \in \sum\limits_{k=1}^{m} F_k$.
Ainsi $E \subset \sum\limits_{k=1}^{m} F_k$.
De plus $\dim E = \mathrm{tr} \mathrm{Id}_E = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{tr} p_k$.
Or les p_k sont des projecteurs, donc $\mathrm{tr} p_k = \mathrm{rg} p_k = \dim F_k$.
Ainsi $\dim E = \sum\limits_{k=1}^{m} \dim F_k$.
On peut alors conclure $E = \sum\limits_{k=1}^{m} F_k$ puis $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{m} F_k$.

Exercice 82 : [énoncé]
H_d est définit comme le sous-espace vectoriel engendré par les monômes de degré d, c'est donc un sous-espace vectoriel. Si $\sum\limits_{k=0}^{n} P_k = 0$ avec $P_k \in H_k$ alors l'unicité de l'écriture d'un polynôme en somme de monôme permet de conclure $P_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. La famille $(H_d)_{0 \leqslant d \leqslant n}$ est donc bien une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe.

Exercice 83 : [énoncé]
Posons $G_1 = F_1$, G_2 le supplémentaire de $G_1 \cap F_2$ dans F_2, et plus généralement G_i le supplémentaire de $(G_1 \oplus \cdots \oplus G_{i-1}) \cap F_i$ dans F_i.
Les G_i existent, ce sont des sous-espaces vectoriels, $G_i \subset F_i$ et $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$.
Soit $x \in E$. On peut écrire $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in F_i$.
Or $x_i = y_1^i + \cdots + y_i^i$ avec $y_j^i \in G_j$ car $F_i = ((G_1 \oplus \cdots \oplus G_{i-1}) \cap F_i) \oplus G_i$.
Par suite $x = z_1 + \cdots + z_n$ avec $z_k = \sum\limits_{\ell=k}^{n} y_k^\ell \in G_k$. Par suite $E = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$.

Exercice 84 : [énoncé]
On a

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i = \dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

donc il y a égalité dans les inégalités $\dim E_i \leqslant \dim F_i$. On peut alors conclure $E_i = F_i$ par inclusion et égalité des dimensions.

Exercice 85 : [énoncé]

a) Si $y \in f(\sum_{i=1}^{n} E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1 + \cdots + x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On alors $y = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ avec $f(x_i) \in f(E_i)$ et ainsi $f(\sum_{i=1}^{n} E_i) \subset \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$.

Si $y \in \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On a alors $y = f(x)$ avec $x = x_1 + \cdots + x_n \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ donc $f(\sum_{i=1}^{n} E_i) \supset \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$.

b) Si $f(x_1) + \cdots + f(x_n) = 0$ avec $x_i \in E_i$ alors $f(x_1 + \cdots + x_n) = 0$ donc $x_1 + \cdots + x_n = 0$ car f injective puis $x_1 = \ldots = x_n = 0$ car les E_i sont en somme directe et enfin $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$. Ainsi les $f(E_i)$ sont en somme directe.

c) Soit $x \in \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$. On peut écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $f(x_j) \in F_j$ donc $f(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_p) \in \sum_{j=1}^{p} F_j$. Ainsi $\sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j) \subset f^{-1}(\sum_{j=1}^{p} F_j)$.

On obtient une inclusion stricte en prenant par exemple pour f une projection sur une droite D et en prenant F_1, F_2 deux droites distinctes de D et vérifiant $D \subset F_1 + F_2$.

$f = 0$ ou $f = \mathrm{Id}$ sont des conditions suffisantes faciles...

Plus finement, supposons chaque F_j inclus dans $\mathrm{Im} f$ (et $p \geqslant 1$)

Pour $x \in f^{-1}(\sum_{j=1}^{p} F_j)$, on peut écrire $f(x) = y_1 + \cdots + y_p$ avec $y_j \in F_j$. Or $F_j \subset \mathrm{Im} f$ donc il existe $x_j \in E$ vérifiant $f(x_j) = y_j$. Evidemment $x_j \in f^{-1}(F_j)$.

Considérons alors $x_1' = x - (x_2 + \cdots + x_p)$, on a $f(x_1') = y_1$ donc $x_1' \in f^{-1}(F_j)$ et $x = x_1' + x_2 + \cdots + x_p \in \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$. Ainsi $f^{-1}(\sum_{j=1}^{p} F_j) \subset \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$ puis l'égalité.

Exercice 86 : [énoncé]

Supposons que w est un isomorphisme.

Puisque l'application $w = v \circ u$ est injective, l'application u est injective.

Puisque l'application $w = v \circ u$ est surjective, l'application v est surjective.

Soit $y \in \mathrm{Im} u \cap \ker v$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et on a $v(y) = 0$ donc $w(x) = 0$. Or $\ker w = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$ puis $y = 0_F$. Ainsi

$$\mathrm{Im} u \cap \ker v = \{0_F\}$$

Soit $y \in F$, $v(y) \in G$ et donc il existe $x \in E$ tel que $w(x) = v(y)$.

Posons alors $a = u(x)$ et $b = y - a$.

On a immédiatement $y = a + b$ et $a \in \mathrm{Im} u$.

De plus $v(b) = v(y) - v(a) = v(y) - w(x) = 0$ donc $b \in \ker v$.

Ainsi

$$\mathrm{Im} u \oplus \ker v = F$$

Inversement, supposons u injective, v surjective et $\mathrm{Im} u$ et $\ker v$ supplémentaires dans F.

Soit $x \in \ker w$. On a $v(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \ker v$. Or $u(x) \in \mathrm{Im} u$ donc $u(x) = 0_F$ car $\mathrm{Im} u \cap \ker v = \{0_F\}$. Puisque u est injective, $x = 0_E$ et ainsi $\ker w = \{0_E\}$.

Soit $z \in G$. Il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$ car v est surjective. On peut écrire $y = u(a) + b$ avec $a \in E$ et $b \in \ker v$ car $\mathrm{Im} u + \ker v = F$. On a alors $z = v(u(a)) = w(a)$ et donc $\mathrm{Im} w = G$.

Finalement G est un isomorphisme.